MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

REITORIA

Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES

27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAL Nº 03 / 2015

Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

ÍNDICE DE INSCRIÇÃO	318
CAMPUS	CARIACICA
ÁREA/SUBÁREA	FÍSICA I

PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS | DISCURSIVA
MATRIZ DE CORREÇÃO

QUESTÃO 01

(a) Temos que no sistema de coordenadas proposto as posições x(t) e y(t) da partícula ficam, considerando-se que o centro de massa do carrinho siga a relação $x_c = vt + x_0$,

$$x = l\,sen(\theta) + x_c = l\,sen(\theta) + vt + x_0$$

$$y = l\cos(\theta)$$

de modo que a derivada temporal dessas coordenadas ficam

$$\dot{x} = lcos(\theta)\dot{\theta} + v$$

$$\dot{y} = -lsen(\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\theta}^2 + 2\,l\,v\,\dot{\theta}\cos(\theta) + v^2$$

$$\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{2} = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2\,lv\,\dot{\theta}\cos(\theta) + v^2\right)$$

A energia potencial do sistema tendo em vista o sistema de coordenadas utilizado fica

$$V = -mgy = -mglcos(\theta)$$

Assim temos que a lagrangeana do sistema é

$$\boldsymbol{L}=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-(-mglcos(\theta))=\frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2+2lv\dot{\theta}\cos(\theta)+v^2\right)+mglcos(\theta)$$

como o problema apresenta apenas um grau de liberdade temos que a eq. de Euler-Lagrange fica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial\theta}=0$$

$$ml^2\ddot{\theta}-mlvsen(\theta)\dot{\theta}+mlv\dot{\theta}\,sen(\theta)+mglsen(\theta)=0$$

Simplificadamente tem-se que

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}sen(\theta)=0$$

(b) para θ pequeno o suficiente $sen(\theta)\approx\theta$ logo temos que

$$\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta\rightarrow\theta(t)=A\,sen(\omega t+\alpha)$$

onde $\omega=\sqrt{g/l}$, logo

$$\theta(t)=A\,sen(\sqrt{g/l}\,t+\alpha)$$

como $\dot{\theta}(0)=0$, ou seja, a partícula está inicialmente em repouso, temos que

$$\dot{\theta}(0)=A\sqrt{g/l}\cos(\alpha)\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$$

Como $\theta(0)=\theta_0$ temos que

$$\theta(0)=\theta_0\rightarrow A=\theta_0$$

Assim sendo,

$$\theta(t)=\theta_0\cos\left(\sqrt{g/l}\,t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Logo sobre a aproximação de pequenos ângulos temos que x e y ficam

$$x(t)\approx v_t+x_0+l\theta_0\cos\left(\sqrt{g/l}\,t+\frac{\pi}{2}\right) \quad ,$$

$$y(t)\approx l \quad .$$

QUESTÃO 02

(a) A parte temporal da Eq. de Schroedinger está expressa pelo termo $T(t)=e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ de modo que $\Psi(x,t)=\psi(x)\cdot T(t)=\psi(x)\cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$.

Tendo em vista que o potencial V(x) nas regiões $x\leq -L/2$ e $x\geq L/2$ é infinito, para manter a validade da equação de Schroedinger, nessas regiões $\psi(x)=0$. Na região -L/2<x<L/2 a Eq. de Schroedinger tempo independente fica:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi=E\psi$$

cuja solução é uma função oscilante do tipo seno ou cosseno, de modo que a solução total fica,

$$\Psi(x,t)=A\cos(kx)e^{-i\omega t}$$

onde $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ e $\omega=\frac{E}{\hbar}$. Ao impor-se as condições de contorno sobre a solução Ψ temos que $\Psi(x=\pm L/2,t)=0$, logo temos que

$$\cos\left(\frac{kL}{2}\right)=0\rightarrow\frac{kL}{2}=\frac{(2n+1)\pi}{2}\rightarrow n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

ou seja,

$$k=\frac{(2n+1)\pi}{L}$$

$$k^2=\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2$$

$$\frac{2mE}{\hbar^2}=\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2$$

$$E=E_n=\frac{(2n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

para normalizar a função de onda Ψ temos que a integral no intervalo [-L/2,L/2] deve ser igual a unidade, ou seja,

$$\int_{-L/2}^{L/2}\Psi^*\cdot\Psi\,dx=1$$

$$\int_{-L/2}^{L/2}|A|^2\cos^2(kx)\,dx=1$$

$$|A|^2\int_{-L/2}^{L/2}\cos^2(kx)\,dx=1$$

$$|A|^2\frac{L}{2}=1$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{L}}$$

Logo, temos que de um modo genérico a solução geral da eq. de Schroedinger e a energia do sistema ficam

$$\Psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t},\rightarrow E_n=\frac{(2n+1)^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Para o estado fundamental n=0 e para o primeiro estado excitado n=1, ou seja,

$$\Psi_0(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}, \rightarrow E_0=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\Psi_1(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}, \rightarrow E_1=\frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

b) Para determinar as incertezas temos que determinar primordialmente os valores esperados. No caso do operador posição x, temos que,

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* x\,\Psi\,dx=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)x\,dx$$

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* x\,\Psi\,dx=0$$

dado que o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico com relação a origem. Analogamente, temos que

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^* x^2\Psi\,dx=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)x^2\,dx$$

$$\langle x^2\rangle=L^2\left[\frac{(\pi^2-6)}{12\pi^2}\right]$$

Logo, a incerteza Δx fica

$$\Delta x=\sqrt{L^2\left[\frac{(\pi^2-6)}{12\pi^2}\right]}=L\sqrt{\left[\frac{(\pi^2-6)}{12\pi^2}\right]}$$

O valor esperado relacionado ao operador momento linear $p=-i\hbar\frac{d}{dx}$ fica

$$\langle p\rangle=\int_{\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\Psi\,dx=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)(i\hbar)\frac{\pi}{L}sen\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$\langle p\rangle=\int_{\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\Psi\,dx=0$$

dada a paridade do integrando e o fato de que o intervalo de integração é simétrico com relação a origem. Já para o valor esperado do momento linear ao quadrado.

$$\langle p^2\rangle=\int_{\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\Psi\,dx=\int_{\infty}^{\infty}\Psi^*\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\right)\Psi\,dx$$

$$\langle p^2\rangle=\frac{2\hbar^2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$\langle p^2\rangle=\frac{2\hbar^2\pi^2}{L^3}\int_{-L/2}^{L/2}\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2}$$

Logo, temos que a incerteza Δp fica

$$\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2}} = \frac{\hbar \pi}{L}$$

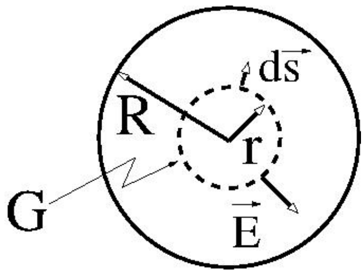
de modo que o produto das incertezas pode ser expresso por

$$\Delta x \cdot \Delta p = L \sqrt{\left[\frac{(\pi^2 - 6)}{12\pi^2}\right]} \cdot \frac{\hbar \pi}{L} = \hbar \sqrt{\frac{(\pi^2 - 6)}{24}}$$

que é da ordem de $\hbar$

QUESTÃO 03

(a) Considerando-se o problema esférico temos que o campo elétrico para a região interna é dado por $\vec{E} = E_0 \hat{r}$, sendo $\hat{r}$ o versor na direção radial. Para uma superfície gaussiana G esférica de raio r<R, semelhante ao apresentado abaixo



A lei de Gauss em seu formalismo integral fica

$$\oint_G \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

Considere que $d\vec{s} = dA \hat{r}$ sendo dA o elemento infinitesimal de área sobre a superfície de raio r. Para determinar q_{env} considere a seguinte relação

$$q_{env} = \int_V \rho(r') dV = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

simplificando-se a lei de Gauss temos que

$$\oint_G (E_0 \hat{r}) \cdot (dA \hat{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$$

$$E_0 \int_G dA = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

$$E_0 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

$$E_0 r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

Derivando-se em ambos os lados da expressão acima com relação a r temos que

$$E_0 2r = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r) r^2$$

$$\rho(r) = \frac{2E_0\varepsilon_0}{r}$$

b) Para fora da esfera, ou seja, r>R precisamos apenas determinar a carga total q_T da esfera,

$$q_T = \int_V \rho(r')dV = \int_0^R \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \int_0^R \frac{2E_0\varepsilon_0}{r'} 4\pi r'^2 dr'$$

$$q_T = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^2$$

Logo, o campo decai radialmente similarmente ao campo de uma carga puntiforme q_T , ou seja,

$$\vec{E} = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{E_0 R^2}{r^2}\hat{r}$$

QUESTÃO 04

Considere que a equação de Poisson seja válida

$$\nabla^2\phi = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_i - n_e)$$

assumindo-se que $n_i = n_0$ e $n_e = n_0 \exp\left(-\frac{e\phi}{k_b T_e}\right)$,

$$\nabla^2\phi = \frac{n_0 e}{\varepsilon_0}\left(1 - e^{-\frac{e\phi}{k_B T_e}}\right)$$

assumindo que a energia térmica $k_B T_e$ é muito maior que a energia eletrostática $e\phi$, ou seja, $e\phi \ll k_B T_e$, tal que

$$e^{-\frac{e\phi}{k_B T_e}} \approx 1 - \frac{e\phi}{k_B T_e}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{e^2 n_0}{k_B T_e \varepsilon_0}\phi$$

pensando-se em um problema unidimensional tem-se que $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, de modo que

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e^2 n_0}{k_B T_e \varepsilon_0}\phi$$

uma solução que recobre um potencial nulo no infinito deve ser do tipo $\phi = \phi_0 e^{-\lambda_D x}$, onde λ_D é o comprimento de Debye, dado por

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{k_B T_e \varepsilon_0}}$$

QUESTÃO 05
(a) Para uma pluma de convencional de materiais sólidos em geral a pluma atinge comprimentos menores que $10^{-4} m$. (b) A escala de tempo é da ordem de $10^{-9} s$ para observar os efeitos de convecção.

Assinatura Presidente

Assinatura Membro