MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

REITORIA

Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES

27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAL Nº 03 / 2015

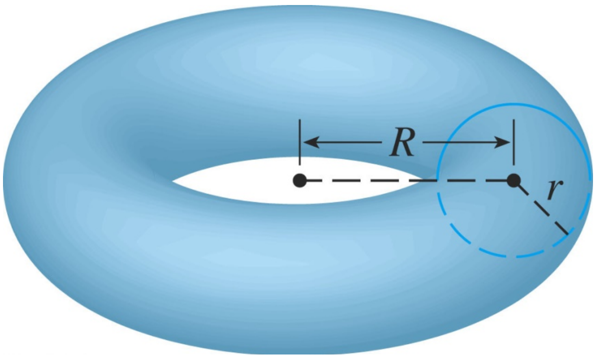
Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

ÍNDICE DE INSCRIÇÃO	**324/325**
CAMPUS	Serra / Cachoeiro de Itapemirin
ÁREA/SUBÁREA	Matemática II

PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS | DISCURSIVA
MATRIZ DE CORREÇÃO

QUESTÃO 01

Considerando o toro abaixo:

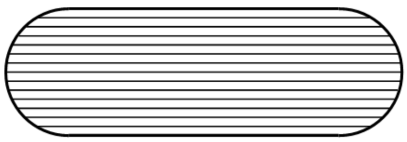


a) Escreva a integral para o volume do toro com raios *r* e *R*, usando a estratégia de sessões transversais.

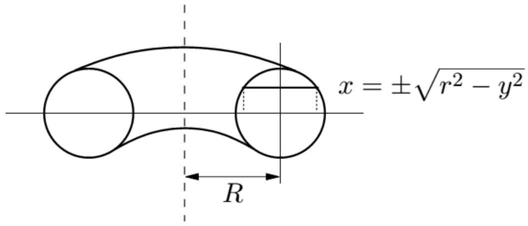
b) Encontre uma fórmula para o volume do toro, resolvendo a integral obtida no item ‘a’.

Resposta:

a) Para definir esta integral de voluma usando a estratégia solicitada, fatiaremos latitudinalmente do toro.



Assim, cada fatia formará uma arruela com raio menor e raio maior, coforme a figura.



Raio menor = $R - \sqrt{r^2 - y^2}$

Raio maior = $R + \sqrt{r^2 - y^2}$

Considerando a simetria do toro em relação ao eixo *x*, definimos o volume com a seguinte integral.

$$V = 2\pi \int_0^r \left(R + \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - y^2}\right)^2 dy$$

$$V = 2\pi \int_0^r R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} + (r^2 - y^2) - R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} - (r^2 - y^2) dy$$

$$V = 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

$$V = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

b) Para solução usar a substituição trigonométrica:

$y = r\,\mathrm{sen}\phi$

$dy = r\cos\phi\, d\phi$

Assim, temos a seguinte igualdade $\int \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \int \sqrt{r^2 - (r\,\mathrm{sen}\phi)^2} \cdot r\cos\phi\, d\phi$

Desenvolvendo,

$$\int \sqrt{r^2 - (r\,\mathrm{sen}\phi)^2} \cdot r\cos\phi\, d\phi = \int \sqrt{r^2(1 - \mathrm{sen}^2\phi)} \cdot r\cos\phi\, d\phi =$$

$$= \int \sqrt{r^2\cos^2\phi)} \cdot r\cos\phi\, d\phi = \int r\cos\phi \cdot r\cos\phi\, d\phi =$$

$$= r^2 \int \cos^2\phi\, d\phi = r^2 \int \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}\, d\phi = \frac{r^2}{2} \int 1 + \cos(2\phi)\, d\phi =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\phi + \frac{sen(2\phi)}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\left(\phi + \frac{2\cos\phi \cdot sen\phi}{2}\right) = \frac{r^2}{2}\left(\phi + \cos\phi \cdot sen\phi\right)$$

Como $y = r\,\mathrm{sen}\phi$, ou seja $\mathrm{sen}\phi = \frac{y}{r}$, temos que $\cos\phi = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}$. Como próximo passo deve-se retornando a função obtida pela substituição trigonométrica para variável y.

$$\frac{r^2}{2}\left(\phi + \cos\phi \cdot sen\phi\right) = \frac{r^2}{2}\left(\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{y}{r} \cdot \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{r}\right)$$

Assim,

$$V = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = 8\pi \frac{Rr^2}{2}\left[sen^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{y\sqrt{r^2 - y^2}}{r^2}\right]_0^r =$$

$$= 8\pi \frac{Rr^2}{2}\left[\left(sen^{-1}\left(\frac{r}{r}\right) + \frac{r\sqrt{r^2 - r^2}}{r^2}\right) - \left(sen^{-1}\left(\frac{0}{r}\right) + \frac{0\sqrt{r^2 - 0^2}}{r^2}\right)\right]$$

$$= 8\pi \frac{Rr^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(0 + 0\right)\right]$$

$$V = 2\pi^2 Rr^2$$

QUESTÃO 02

Enuncie, apresente um exemplo e indique aplicações do Teorema de Green.

Resposta:

Teorema de Green:

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente e seja D a região delimitada por C. Se P e Q tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contém D, então

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Exemplo: O exemplo deve conter o problema, o desenvolvimento dos cálculos e respostas.

Aplicações: O Teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha torno de uma curva fechada C e uma integral dupla na região do plano delimitada por C.

QUESTÃO 03

Defina transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Defina o núcleo e a imagem de uma transformação. Enuncie e demonstre o Teorema do Núcleo e Imagem. Dê um exemplo de uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão três, com núcleo diferente do espaço nulo, e encontre o núcleo e imagem dessa transformação.

Resposta:

Transformação Linear:

Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita. Uma transformação linear $T : V \to W$ é uma função que associa a cada vetor $v \in V$ um vetor $Tv \in W$ tal que

$T(u+v) = Tu + Tv$

$T(\alpha u) = \alpha \text{Tu}$

para todo $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Núcleo e Imagem:

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O Núcleo de T é o conjunto $N(T) = \{v \in V; Tv = 0\}$. A Imagem de T é o conjunto $\operatorname{Im}(T) = \{w \in W; Tw = v \text{ para algum } v \in V\}$.

Teorema do Núcleo e Imagem:

Sejam V, W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então

$$\dim(V) = \dim(N) + \dim(\operatorname{Im})$$

Demonstração:

Sejam $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Temos que $1 \le \dim(N) \le n$. Seja $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ uma base de $N(T)$. Sejam $v_{k+1}, ..., v_n \in V$ tal que

$B' = \{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ seja uma base de V. Dado $v \in V$ temos $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + ... + \alpha_n v_n$ então

$$\begin{aligned} Tv &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + ... + \alpha_n v_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + ... + T(\alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) + ... + T(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 Tv_1 + \alpha_2 Tv_2 + ... + \alpha_k Tv_k + \alpha_{k+1} Tv_{k+1} + ... + \alpha_n Tv_n. \end{aligned}$$

Como $v_1, v_2, ..., v_k \in N(T)$ então $T(\alpha_1 v_1) = T(\alpha_2 v_2) = ... = T(\alpha_k v_k) = 0$. Assim $Tv = T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) + ... + T(\alpha_n v_n)$ e $T(\alpha_{k+1} v_{k+1}), ..., T(\alpha_n v_n)$ geram a $\mathrm{Im}(T)$. Considere a combinação linear $\beta_{k+1} T(v_{k+1}) + ... + \beta_n T(v_n) = 0$. Logo $T(\beta_{k+1} v_{k+1} + ... + \beta_n v_n) = 0$ o que implica $\beta_{k+1} v_{k+1} + ... + \beta_n v_n \in N(T)$. Como $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ uma base de $N(T)$ então existem escalares $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ tais que $\beta_{k+1} v_{k+1} + ... + \beta_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$, logo $\beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k - \beta_{k+1} v_{k+1} - ... - \beta_n v_n = 0$. Como $B' = \{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ é base de V então $\beta_1 = ... = \beta_k = \beta_{k+1} = ... = \beta_n = 0$. Assim $\{T(\alpha_{k+1} v_{k+1}), ..., T(\alpha_n v_n)\}$ é um conjunto linearmente independente e logo uma base da $\mathrm{Im}(T)$. Portanto $\dim(N) + \dim(\mathrm{Im}) = k + (n-k) = n = \dim(V)$.

Exemplo: O exemplo deve conter o problema, o desenvolvimento dos cálculos e respostas.

QUESTÃO 04

Enuncie o Teorema de existência e unicidade para equações lineares de 2ª ordem. Descreva o método de variação de parâmetros para encontrar a solução geral de uma equação linear de 2ª ordem.

Resposta:

Teorema de existência e unicidade:
Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y'(t_0) = y_0' \ , y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

para $p(t), q(t)$ e $g(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0. Então existe uma única solução $y = \varphi(t)$ desse problema de valor inicial no intervalo I.

Método de variação de parâmetros:
Considere a edo

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad (1)$$

$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$ com $p, q, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da edo homogênea associada $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ com $W[y_1(t), y_2(t)] \neq 0 \ \forall \ t \in (\alpha, \beta)$. Suponha que a solução particular $Y(t)$ da edo (1) seja da forma $Y(t) = \mu_1(t) y_1(t) + \mu_2(t) y_2(t)$ onde $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ são fuções a serem determinadas. Suponha $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ com drivadas contínuas. Temos

$$Y'(t) = \mu_1'(t) y_1(t) + \mu_1(t) y_1'(t) + \mu_2'(t) y_2(t) + \mu_2(t) y_2'(t)$$

Suponha $\mu'_1(t)y_1(t)+\mu'_2(t)y_2(t)=0$ então

$$Y'(t)=\mu_1(t)y'_1(t)+\mu_2(t)y'_2(t) \quad \text{e}$$

$$Y''(t)=\mu_1(t)y''_1(t)+\mu'_1(t)y_1(t)+\mu_2(t)y''_2(t)+\mu'_2(t)y'_2(t).$$

Substituindo Y,Y',Y'' na edo (1) temos

$$\mu_1(t)y''_1(t)+\mu'_1(t)y_1(t)+\mu_2(t)y''_2(t)+\mu'_2(t)y'_2(t)$$

$$+p(t)\left[\mu'_1(t)y_1(t)+\mu_1(t)y'_1(t)+\mu'_2(t)y_2(t)+\mu_2(t)y'_2(t)\right]+q(t)\left[\mu_1(t)y_1(t)+\mu_2(t)y_2(t)\right]=g(t)$$

Colocando os termos $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ en evidência

$$\left(y_1''+p(t)y_1'+q(t)y_1\right)\mu_1+\left(y_2''+p(t)y_2'+q(t)y_2\right)\mu_2+\mu'_1(t)y'_1(t)+\mu'_2(t)y'_2(t)=g(t)$$

como $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da edo homogênea então $\mu'_1(t)y'_1(t)+\mu'_2(t)y'_2(t)=g(t)$. Considere o sistema

$$\begin{cases}\mu'_1(t)y_1(t)+\mu'_2(t)y_2(t)=0\\ \mu'_1(t)y'_1(t)+\mu'_2(t)y'_2(t)=g(t)\end{cases}$$

como $W\left[y_1(t),y_2(t)\right]\neq 0 \ \forall \ t\in(\alpha,\beta)$ o sistema tem solução única. Pela regra de Kramer

$$\mu'_1(t)=\frac{\left|\begin{pmatrix}0 & y_2(t)\\ g(t) & y'_2(t)\end{pmatrix}\right|}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}=\frac{-g(t)y_2(t)}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]} \quad \text{e}$$

$$\mu'_2(t)=\frac{\left|\begin{pmatrix}y_1(t) & 0\\ y'_1(t) & g(t)\end{pmatrix}\right|}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}=\frac{g(t)y_1(t)}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}.$$

Logo,

$$\mu_1(t)=\int\frac{-g(t)y_2(t)}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}dt \quad \text{e} \quad \mu_2(t)=\int\frac{g(t)y_1(t)}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}dt.$$

Portanto,

$$Y(t)=-y_1(t)\int\frac{g(t)y_2(t)}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}dt+y_2(t)\int\frac{g(t)y_1(t)}{W\left[y_1(t),y_2(t)\right]}dt$$

e a solução geral da edo (1) é dada por $y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_1(t)+Y(t)$ com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

QUESTÃO 05

Encontre a fórmula da elipse considerando a definição: Dados dois pontos quaisquer do plano F1 e F2 e seja 2c a distância entre eles, elipse é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias à F1 e F2 é a constante 2a (2a > 2c).

Resposta:

Sejam $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ e $a > c$, $a \neq 0$. A elipse é o conjunto de pontos $P(x,y)$ tais que

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$(x+c)^2 - (x-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2xc + c^2 - x^2 + 2xc - c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2\left[x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2y^2 = \left(a^2 - c^2\right)a^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)\frac{x^2}{a^2} + y^2 = \left(a^2 - c^2\right)$$

Como $a^2 - c^2 > 0$ tome $b^2 = a^2 - c^2$, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

______________________________ Assinatura Presidente

______________________________ Assinatura Membro

_________ / _________ / 2015