MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

REITORIA

Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES

27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAL Nº 03 / 2015

Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

ÍNDICE DE INSCRIÇÃO	**326**
CAMPUS	Cariacica
ÁREA/SUBÁREA	Matemática III

PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS | DISCURSIVA
MATRIZ DE CORREÇÃO

QUESTÃO 01

Defina uma transformação linear e mostre que a operação de integração é uma transformação linear. Apresente a matriz, A, da transformação linear descrita como a operação de derivação de polinômios de grau 2. Verifique se esta transformação é injetora e/ou sobrejetora.

Resolução:

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Um transformação linear é uma função de V em W, F: V→ W. que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam u e v em V, F(u + v) = F(u) + F(v)

ii) Quaisquer que sejam k $\in$ R e v $\in$ V, F(kv) = kF(v)

Propriedades de Integrais

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$T{:}P_2 \rightarrow P_1$

$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_1 + 2a_2t$

Tome a base $B = \{1,t,t^2\}$,

$T(1) = 0$

$T(t) = 1$

$T(t^2) = 2t$

$$[\mathrm{T}]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para mostrar que T não é injetora basta apresentar dois polinômios do 2º grau cuja a derivada seja o mesmo polinômio do 1º grau. Uma forma alternativa é mostrar que as colunas de T são linearmente dependentes.

Para mostra que T é sobrejetora basta mostrar que as colunas da matriz de T geram o P_1.

QUESTÃO 02

Defina anéis, ideais à direita, ideais à esquerda e ideais. Apresente um exemplo de um Anel A e conjuntos B e C, onde B e ideal à direita de A, C é ideal à esquerda de A e nenhum dos dois é ideal de A. Mostre que A é um anel, B é ideal à direita de A e C é ideal à esquerda de A.

Resolução:

Um anel é uma estrutura algébrica que consiste num conjunto A com um elemento 0 e duas operações + e · que satisfazem as seguintes condições:

1) Associatividade de +: $(\forall\, a, b, c \in A): (a + b) + c = a + (b + c)$
2) Existência de elemento neutro (0) de +: $(\forall\, a \in A): a + 0 = 0 + a = a$
3) Existência de simétrico de +: $(\forall\, a \in A)(\exists\, b \in A): a + b = 0$
4) Comutatividade de +: $(\forall\, a, b \in A): a + b = b + a$
5) Associatividade de ·: $(\forall\, a, b, c \in A): (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6) Distributividade de · em relação a + (à esquerda e à direita): $(\forall\, a, b, c \in A)$:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

I é um ideal à esquerda de A se: $a \cdot x \in I,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, x \in I.$
J é um ideal à esquerda de A se: $x \cdot a \in J,\ \forall\, a \in A,\ \forall\, x \in J.$
I é um ideal de A se I é ideal à direita e a esquerda de A.

Seja A o anel $\mathrm{Mat}_2(\mathrm{R}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in R$ e sejam B e C definidos como:

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} : a, c \in R \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in R$$

B é ideal à esquerda de A e C é ideal à direita de A, mas nenhum dos dois é ideal de A.

QUESTÃO 03

Se *f(t)* é contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial α, então $L\{f\}(s)$existe para $s > \alpha$. Assim considerando, prove que a integral $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ converge para $s > \alpha$.

Resolução:

Começamos escrevendo a integral em forma de uma soma:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{T} e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt\,,$$

em que T é escolhido de modo que a desigualdade $|f(t)| \le Me^{at}, \forall\, t \ge T$ seja válida.

A primeira integral referente à soma existe porque ***f(t)*** e, portanto $\boldsymbol{e^{-st}f(t)}$ são contínuas por partes no intervalo $[0, T]$ para qualquer ***s*** fixo.

Para verificarmos se a segunda integral da soma converge, usamos o *teste da comparação para integrais impróprias*.

Como *f(t)* é de ordem exponencial α, temos para $\boldsymbol{t \ge T}$

$$|f(t)| \le Me^{at}\,,$$

assim,

$$\left|e^{-st} f(t)\right| = e^{-st}\,|f(t)| \le Me^{-(s-\alpha)t},$$

para todo $\boldsymbol{t \ge T}$.

Se $\boldsymbol{s > \alpha}$**,** temos

$$\int_T^{\infty} Me^{-(s-\alpha)t} dt = M\int_T^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{Me^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} < \infty$$

Como $\left|e^{-st} f(t)\right| \le Me^{-(s-\alpha)t}$, para $\boldsymbol{t \ge T}$ e a integral imprópria da segunda parte da função maior converge para $\boldsymbol{s > \alpha}$**,** então, pelo teste da comparação, a integral dada converge para $\boldsymbol{s > \alpha}$**.**

Como cada integral da soma existe, então a transformada de Laplace existe.

QUESTÃO 04
Sabemos que o limite é o alicerce sobre o qual estão todos os demais conceitos do Cálculo. Assim considerando, use os conhecimentos nessa área e prove que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cox}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}.\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)}\right]$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+\cos x}\right)$$

Calculando separadamente cada limite:

Primeiro limite do produto:

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\frac{sen\,0}{0}=\frac{0}{0}$ (indeterminação)

Para resolver o limite, interpretaremos x como um ângulo medido em radianos e trabalhar no intervalo ***0 < x < π/2***.

$$\frac{1}{2}tgx\geq\frac{1}{2}x\geq\frac{1}{2}senx$$

Multiplicando-se todos os membros por ***2/(sen x)*** e usando o fato de que sen x > 0 no intervalo dado, temos

$$\frac{1}{\cos x}\geq\frac{x}{senx}\geq 1$$

Em seguida, tomando os recíprocos e revertendo as desigualdades, obtemos

$$\cos x\leq\frac{senx}{x}\leq 1\text{, assim}$$

$$\lim_{x\to 0}\cos x\leq\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\leq\lim_{x\to 0}1$$

$$1\leq\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\leq 1$$

Então

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$$

Segundo limite do produto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,0}{1+\cos 0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0}{1+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+\cos x}=0$$

Assim:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cox}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}.\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{sen^2 x}{x(1+\cos x)}\right]$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+\cos x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cox}{x}=(1).(0)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cox}{x}=0$$

QUESTÃO 05

Considere o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$, que é a cônica de equação $ax^2 + bx - y + c = 0$, pede-se:

a) Faça uma translação de eixos para mostrar que a cônica é uma parábola e determine o foco, o vértice, a diretriz, o eixo e o parâmetro em função dos coeficientes *a*, *b* e *c*;

b) Deduza uma condição sobre *a*, *b* e *c* para que a parábola intercepte o eixo-*x* e obtenha as coordenadas dos pontos de interseção.

Resolução:

a) O enunciado deixa claro que podemos relacionar a questão com função quadrática, assunto estudado no ensino médio, assim, iniciamos completando os quadrados:

$$ax^2+bx=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$
$$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)^2-\frac{b^2}{4a}$$

Portanto,

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Em que $\Delta = b^2 - 4ac$ indica, ficando a equação equivalente a:

$$y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Façamos a translação do sistema de coordenadas para $O' = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. As equações de translação são:

$$x = -\frac{b}{2a} + u \qquad y = -\frac{\Delta}{4a} + v$$

A nova equação cônica é $\boldsymbol{v = au^2}$, ou $\boldsymbol{u^2 = v/a}$.
Trata-se de uma parábola de parâmetro p = ¼|a|, de vértice *O'* e foco no eixo *Ov* (semi-eixo positivo se $a > 0$, semi-eixo negativo se $a < 0$).

Em relação ao sistema novo:
foco é F = (0, ¼|a|)
diretriz r: v = -1/4[a]
eixo s: u = 0

Em relação ao sistema antigo:

$$F = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$r : y = \frac{1-\Delta}{4a}$$

$$s : x = \frac{-b}{2a}$$

b) Um ponto $X = (x, y)$ pertence à interseção da parábola com *Ox* se, e somente se, $\boldsymbol{y = 0}$ e satisfaz $y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, isto é,

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Uma condição necessária e suficiente para que exista *X* nessas condições é $\Delta \geq 0$, nesse caso,

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Essas expressões fornecem as abscissas dos pontos de interseção da parábola com *Ox*. Logo, a condição é que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, e os pontos de interseção

$$P = \left(\frac{-b + \Delta}{2a}, 0 \right) \qquad Q = \left(\frac{-b - \Delta}{2a}, 0 \right)$$

distintos se $\Delta > 0$, e *coincidentes* se $\Delta = 0$.

______________________________ Assinatura Presidente

______________________________ Assinatura Membro

_________ / _________ / 2015