MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
REITORIA
Avenida Rio Branco, 50 – Santa Lúcia – 29056-255 – Vitória – ES
27 3357-7500

CONCURSO PÚBLICO
EDITAL Nº 03 / 2016

Professor do Magistério do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico

ÍNDICE DE INSCRIÇÃO	314
HABILITAÇÃO	Matemática I

PROVA DE CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS | DISCURSIVA
MATRIZ DE CORREÇÃO

QUESTÃO 01

Solução:

a) Teorema de Existência e Unicidade: Considere o problema de valor inicial para o sistema de equações lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \\ x_1(t_0) = x_0^1, \quad \cdots \quad , x_n(t_0) = x_0^n \end{cases} \qquad (1)$$

onde as funções $a_{ij}, f_i: I \to \mathbb{R}$ são contínua e $t_0 \in I$. Então o problema de valor inicial (1) possui solução única no intervalo I.

b) Da equação $mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t)$ (1) temos

$$mu''(t) + ku(t) = 0$$

$$u''(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$$

Faça $x_1 = u$ e $x_2 = u'$, assim

$$x_1' = u' = x_2 \text{ e } x_2' = u'' = -\frac{k}{m}u = -\frac{k}{m}x_1.$$

Logo

$$\begin{cases} x_1' = 0x_1 + x_2 \\ x_2' = -\frac{k}{m}x_1 + 0x_2 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad (2).$$

c) Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$ então os autovalores de A são dados por $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2 + -\frac{k}{m} = 0$. Logo temos $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Temos que um autovetor $X_1 = \binom{c}{d}$ associado ao autovalor $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ é dado por

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)X_1 = \overline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix} \binom{c}{d} = \binom{0}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\sqrt{\dfrac{k}{m}}c + d = 0 \\ -\dfrac{k}{m}c - i\sqrt{\dfrac{k}{m}}d = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $-i\sqrt{\frac{k}{m}}$ temos que as equações do sistema acima são múltiplas. Logo, $d = i\sqrt{\frac{k}{m}}c$ e para $c = 1 \Rightarrow d = i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Assim, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}$. Uma solução complexa do sistema (2) é dada por

$$\Phi(t) = e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}}X_1 = \left[cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + isen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\dfrac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\dfrac{k}{m}}cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral é

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\dfrac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} sen\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\dfrac{k}{m}}cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix}$$

Para $x(0) = \binom{a}{b}$ temos

$$\binom{a}{b} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = a, c_2 = b\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

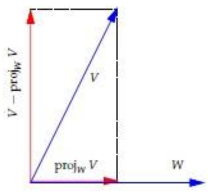
Portanto a solução P.V.I é

$$x(t) = a\begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix} + b\sqrt{\frac{m}{k}}\begin{bmatrix} sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{bmatrix}.$$

QUESTÃO 02

Solução:

a)



Temos que o vetor $proj_w v$ é paralelo a w e que $v - proj_w v$ é ortogonal a v então

$$< v - proj_w v, w > = 0$$
$$< v, w > - < proj_w v, w > = 0$$
$$< v, w > = < proj_w v, w >$$

Como $< proj_w v, w >$ é paralelo a w então existe um escalar α tal que $proj_w v = \alpha w$. Assim,

$$< v, w > = < \alpha w, w > = \alpha < w, w > = \alpha \|w\|^2 \Rightarrow \alpha = \frac{<v,w>}{\|w\|^2}.$$

Portanto,

$$proj_w v = \alpha w = \frac{< v, w >}{\|w\|^2} w.$$

b) Complemento ortogonal de S:

$$S^* = \{ \ v, w \in V \backslash < v, w > = 0 \, para \, todo \ \ w \in S \}.$$

Sejam $u, v \in S^*$, $w \in S$ e $\alpha \ \in \mathbb{R}$. Então

$$< u + v, w > = < u, w > + < v, w > = \ 0 + 0 = 0 \ \Rightarrow \ u + v \in S^*;$$
$$< \alpha v, w > = \ \alpha < v, w > = \ \alpha 0 = 0 \ \Rightarrow \alpha v \ \in S^*.$$

Portanto, S^* é subespaço de V.

c) Basta tomar $u_1 = proj_W v$ e $u_2 = v - u_1$. Temos que v_1, v_2, v_3 não formam uma base ortogonal do subespaço W. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt obtemos uma base ortogonal de W,

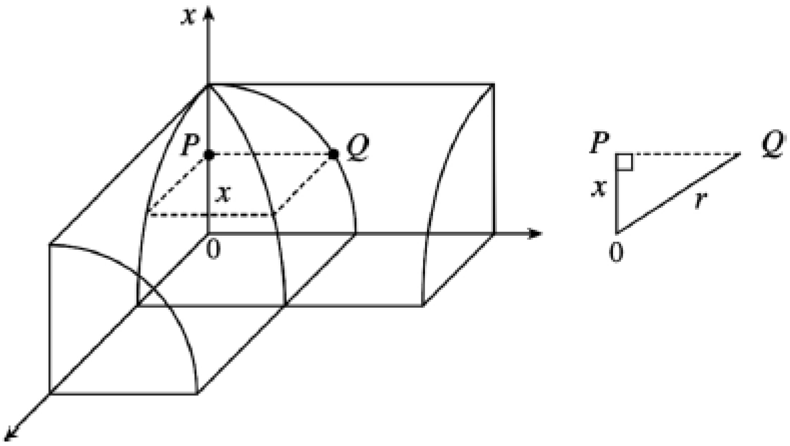
$$w_1 = v_1 = (1,0,0,0)$$
$$w_2 = v_2 - proj_{w_1} v_2 = (0,1,0,0)$$
$$w_3 = v_3 - proj_{w_1} v_3 - proj_{w_2} v_3 = (0,0,1,1)$$

Assim,

$$u_1 = proj_W v = proj_{w_1} v + proj_{w_2} v + proj_3 v = (-2, -4,1,1)$$
$$u_2 = v - u_1 = (0,0, -1,1).$$

QUESTÃO 03

Solução:



Defina S como sendo o sólido gerado pela interseção dos dois cilindros, ambos de raio r, cujos eixos se interceptam em ângulos retos.
Cada secção transversal do sólido S é um plano paralelo ao plano xy cujo formato é um quadrado, uma vez que os bordos do corte gerado pela interseção dos cilindros são perpendiculares.
A figura mostrada acima corresponde a um oitavo do volume total de S.
Utilizando o teorema de Pitágoras encontramos $|PQ|^2 + x^2 = r^2$o que implica que $|PQ|^2 = r^2 - x^2$.
Logo a medida do lado deste quadrado é $2\sqrt{r^2 - x^2}$, cuja área é $A(x) = 4r^2 - 4x^2$.
Portanto o volume do sólido S pode ser escrito da seguinte forma:

$$V = \int_{-r}^{r} A\,(x)dx = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 8\int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 8\left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{r} = \frac{16r^3}{3}.$$

QUESTÃO 04

Solução:

a) Definiremos como sendo A a área total da elipse, como esta cônica é simétrica em relação aos eixos, então usaremos a seguinte função definida no primeiro quadrante:
$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ no qual $0 \leqslant x \leqslant a$
Logo

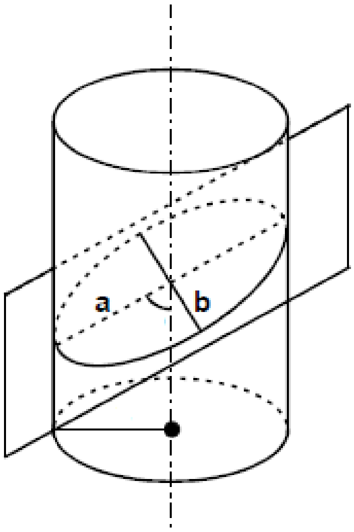
$$A = 4\int_{0}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$

Uma vez que $x = asen(t)$ pela substituição trigonométrica, então $dx = acos(t)dt$.
Analisando os limites de integração nesta nova variável temos que: quando $x = 0$ obtemos que $0 = asen(t)$ logo $t = 0$, por outro lado quando $x = a$ obtemos que $a = asen(t)$ logo $t = \frac{\pi}{2}$. Por outro lado
$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2sen^2(t)} = \sqrt{a^2cos^2(t)} = acos(t)$ visto que $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Finalizando a questão,

$$A = 4\int_{0}^{a} \left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = 4\frac{b}{a}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} acos\,(t)acos(t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,(t)dt,$$

$$4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,(t)dt = 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + cos(2t)}{2}\right) dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \big(1 + cos(2t)\big)\,dt = \pi ab.$$

b) Dado um cilindro reto de base circular de raio r, a cônica originada pela interseção de um plano que corta o eixo do cilindro por um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ é uma elipse (ilustrada na figura abaixo).



Determinaremos os valores de a e b.
Observe que b corresponde ao raio do cilindro reto de base circular, então $b = r$. Por outro lado note que $a$corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo onde b corresponde ao cateto oposto ao ângulo de $\frac{\pi}{4}$.
Logo
$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a}$, sabendo que $b = r$,concluímos que $a = \sqrt{2}r$.
Pelo item a), encontramos $A = \pi\sqrt{2}r^2$.

QUESTÃO 05

Solução:

(i) Teorema do Valor Médio: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(ii) Seja $x_1, x_2 \in (a, b)$ tal que $x_1 < x_2$. Como f é difrenciável em (a, b) então é diferencável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$. Pelo teorema do Valor Médio existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1 - x_2).$$

Temos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ então $f'(c) = 0$, assim $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) = f(x_1)$. Portanto, f é uma função constante.

(iii) Seja $f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x > 0 \\ -1 \; se < 0 \end{cases}$. Temos que $dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x) = 0$ para todo $x \in dom(f)$ mas f não é constante. Isso não contraria o resultado anterior pois o domínio da função não é um intervalo.