

Abordagem das operações aritméticas básicas com números inteiros no ensino fundamental

Jady Ogioni Coelho¹
Jenifer Heleno Stoffel²
Sávio Conceição França Nunes³
Gerliane Martins Cosme⁴

Resumo: Este artigo tem como tema central a dificuldade que os alunos apresentam no trato de conhecimentos matemáticos já ministrados em séries anteriores, de modo especial, as operações aritméticas básicas com números inteiros. Além de uma discussão sobre esta problemática, trazemos um breve apanhado histórico sobre o surgimento dos números negativos seguido do relato da experiência que desenvolvemos no Pibid com duas turmas de 7^a série de uma escola pública estadual localizada no município de Serra-ES em conjunto com a professora regente.

Palavras-chave: operações aritméticas; números inteiros; dificuldades de aprendizagem.

1. Introdução

Parece bastante razoável que um aluno, durante o ano letivo, não consiga aprender um ou outro conteúdo curricular, especialmente se considerarmos as grandes listagens de conteúdos que se apresentam nas propostas curriculares das redes de ensino, sejam elas públicas ou particulares. Entretanto, a experiência tem mostrado que alunos, de modo particular, nas escolas públicas têm chegado às séries posteriores, sabendo cada vez menos os conteúdos das séries anteriores que são, em geral, pré-requisitos. Embora este não seja um problema atual, parece estar se tornando cada vez mais forte e preocupante.

Acreditamos que um dos fatores que pode contribuir para reforçar tal problema seja relativo às dúvidas que os alunos têm em relação aos conteúdos que não são manifestadas ao professor. Ou ainda, existem situações que manifestam suas indagações e afirmam ter compreendido, quando na verdade não compreenderam após a tentativa de esclarecimento do professor. Notamos, portanto, ser importante que o professor esteja atento durante o processo de ensino e aprendizagem para perceber se aquilo que está ensinando está, de fato, sendo aprendido por seus alunos. De modo que às dúvidas dos alunos sejam esclarecidas sempre dentro do possível. De modo particular, o professor precisa estar atento àqueles alunos que apresentam maior grau de dificuldade de aprendizagem, pois, em geral, esses alunos são os que menos manifestam suas dúvidas.

Outro aspecto que merece destaque é a concentração dos alunos nas aulas para que tenha mais chances de conseguir um aprendizado efetivo de conteúdos matemáticos. Muita atenção deve ser despendida quando se está em jogo o aprendizado do conhecimento matemático e cabe, principalmente, mas não somente, ao professor a tarefa de fazer de sua aula uma atmosfera propícia

¹ Licencianda de Matemática no Ifes/Vitória e bolsista do Pibid/Mat./EF/ jady257@hotmail.com

² Licencianda de Matemática no Ifes/Vitória e bolsista do Pibid/ Mat./EF / jeniferstoffel@hotmail.com

³ Licenciando de Matemática no Ifes/Vitória e bolsista do Pibid/ Mat./EF / savio_cfn@hotmail.com

⁴ Licenciada em Matemática e Mestre em Educação pela UFES; Trabalha na EEEFM Belmiro Teixeira Pimenta e na FAESA. Professora supervisora do Pibid/Ifes/Matemática Ensino fundamental gmartinscosme@gmail.com

à concentração e à aprendizagem. Também é de responsabilidade deste o desenvolvimento em seus alunos de atitudes que mantenham essa atmosfera. Temos observado que isso, muitas vezes parece impossível, de modo particular se consideramos as turmas de quase quarenta adolescentes que lotam as salas de aula das séries finais do ensino fundamental e que adoram conversar durante as aulas. Porém, todo esforço precisa ser feito nesse sentido, caso contrário, poderemos dizer em relação ao processo de ensino e aprendizagem da matemática: *nada é tão ruim que não possa piorar*.

Podemos pensar nos conteúdos matemáticos como uma enorme rede na qual tais conteúdos mantêm uma relação de interdependência. Alguns mantendo uma relação mais forte ou mais fraca com outros. A falta de compreensão adequada dos conceitos, definições e significados em determinado conteúdo compromete, muitas vezes profundamente, no aprendizado de outros. Por exemplo, a falta de uma compreensão adequada dos significados relacionados às operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão (como veremos no relato de nossa experiência a seguir), compromete a assimilação, de modo geral, de praticamente todo o conhecimento matemático.

Deste modo, consideramos que o ensino da matemática tem característica que o *verdadeiro aprendizado matemático* é obtido por meio da apreensão de conceitos, definições e significados, e não somente pela memorização de regras e procedimentos. Desconstruir essa forma de pensar e fazer o ensino e aprendizagem da matemática *estritamente* por meio de memorização de regras e procedimentos o que pode representar um grande desafio para os professores de matemática na atualidade. Essa forma de ensino traz consequências graves para a construção do corpo de conhecimentos matemáticos dos alunos, pois a memorização de regras e procedimentos sem a devida apreensão de conceitos e significados gera a formação de conhecimentos muitas vezes equivocados. Por exemplo, como veremos adiante no relato de nossa experiência com duas turmas de 7ª série (ou 8º ano⁵) do ensino fundamental de uma escola pública da rede estadual de ensino. Identificamos em uma ocasião que exigia as operações de adição e multiplicação de números inteiros (positivos e negativos) os alunos dizendo “menos com menos dá mais”, tanto para multiplicação – onde a regra faz sentido – quanto para a adição, onde não faz sentido.

Este relato aponta que, no caso específico do ensino das operações com números inteiros – positivos e negativos, a formalização das regras sem o entendimento real das ideias, conceitos e significados que permeiam esse conteúdo comprometeu o desenvolvimento do conteúdo “operações com monômios”.

Identificamos a partir dessa experiência dificuldades por parte de alguns alunos em compreender, por exemplo, que na verdade “menos com menos dá mais” está errado, tanto matematicamente, visto que não existe a operação *com* em matemática. Só temos isso como verdade se a frase for “menos multiplicado por menos dá mais” ou ainda “menos dividido por menos dá mais”. Um breve resgate de algumas passagens da história da matemática sobre esses números pode não justificar essa dificuldade, mas pode nos ajudar a compreender que, embora a ideia pareça simples para nós

⁵ Estamos em fase de transição de nomenclatura, o ensino fundamental que consistia de 1ª a 8ª série passa a ser de 1º ao 9º ano e insere as crianças de 6 anos na escola básica. Porém, como na escola ainda utiliza-se séries vamos optar por fazer esse registro no nosso trabalho.

professores hoje, não é tão simples para nossos alunos, assim como não foi simples para alguns grandes matemáticos.

Por exemplo, podemos verificar que o estranhamento que os números negativos causam em nossos alunos hoje foi também experimentado por grandes matemáticos como Euler, Laplace, Cauchy, Mac Laurin e Carnot e instigava questionamentos até parecidos com os de nossos alunos. Por exemplo, em relação à supracitada regra de sinais, Laplace (1749-1827) afirmou: “É difícil conceber que um produto de (-a) por (-b) é o mesmo que a por b” e Mac Laurin (1698-1746): "A quantidade negativa, bem longe de ser rigorosamente menos que nada, não é menos real em sua espécie que a quantidade positiva" (TALAVERA, 2012, p. 1).

De acordo com Talavera (2012), foram os matemáticos hindus que permitiram conceber um novo tipo de símbolo para representar dívidas que, posteriormente, o ocidente passaria a chamar de negativo. O nome *negativo* provavelmente foi dado assim devido ao fato desses números terem sido *negados* em determinadas épocas, quando ao se tentar resolver algumas equações eram obtidas raízes negativas de que eram recusadas.

Segundo (TALAVERA, 2012), as regras da aritmética apareceram referindo-se aos números negativos pela primeira vez de forma explícita na obra do matemático Brahmagupta em 628 d.C. Mas foi no Renascimento que, para Talavera (2012), se abriu uma nova etapa para os números negativos: aparecimento de um número negativo ligado à uma equação algébrica, na obra do matemático francês Nicolás Chuquet (1445-1500); aceitação dos números negativos como raízes e coeficientes de equações por Stevin (1548-1620); com o nascimento das ciências modernas o uso dos números negativos é ampliado e aparecem as primeiras intenções de legitimá-los, mas a legitimidade dos números negativos deu-se definitivamente por Hermann Hankel (1839-1873) em sua obra *Teoria do Sistema dos números Complexos*, publicada em 1867. Hankel formulou o *princípio de permanência* e das leis formais que estabelece um critério geral de algumas aplicações do conceito de número.

2. Narrativa de nossa experiência

Ao começarmos nossas atividades na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Belmiro Teixeira Pimenta em maio do corrente ano, com uma reunião inicial com a professora-supervisora do PIBID nessa escola, Gerliane Martins Cosme, fomos surpreendidos com a apresentação do resultado de uma prova de conteúdos de revisão que a professora havia aplicado nas turmas A e B de 7ª série. Havia grande quantidade de provas em branco. Os alunos sequer tentaram resolver as questões, demonstrando aparentemente um total desconhecimento dos assuntos/conteúdos ou total falta de comprometimento que esses alunos demonstram na avaliação, assuntos esses ministrados em séries anteriores, ou seja, nas 5ª e 6ª séries e revisados em aulas anteriores à avaliação pela professora.

Já em observação nas salas dessas turmas, fizemos uma primeira identificação no que diz respeito à problemática tratada neste artigo. Ao tentar trabalhar adição de monômios com os alunos a professora se deparou diante a dificuldade dos alunos em realizar esta operação quando apareciam

números negativos. Por exemplo, quando solicitados para efetuar a operação “ $(- 11a) + (- 4a)$ ” os alunos davam como resultado a resposta “ $+15a$ ”.

Após essa identificação, no primeiro horário de planejamento que tivemos com a professora, discutimos sobre essa deficiência e sobre a dificuldade apresentada por boa parte dos alunos. Em função disso, decidimos com a professora que faríamos juntos um trabalho em paralelo com os conteúdos curriculares inerentes àquelas séries, com o intuito de rever as operações básicas de adição/subtração e multiplicação/divisão de números positivos e negativos.

Planejamos então três atividades. A primeira sugerida por nós foi a aplicação do jogo “Cubra-Doze”, que de imediato tinha dois propósitos: o primeiro seria uma maneira saudável e bastante amigável de nos aproximarmos dos alunos, proporcionando uma adaptação mais rápida à turma. Nesse caso, um jogo representaria uma atividade propícia, pois geralmente é uma atividade que eles gostam muito e, de fato, ajudou; o segundo seria fazer os alunos exercitarem, inicialmente, as operações básicas de adição-subtração e multiplicação-divisão sob nossa observação. Dando sequência ao “Cubra Doze”, a atividade proposta pela professora, buscaria revisar por meio do preenchimento de duas tabelas a adição e multiplicação de números positivos e negativos, e a partir delas, com uma atividade de investigação os alunos seriam levados a recordar/(re)formular as “regras” das operações com números inteiros. Para a terceira atividade propomos uma conjugação das duas primeiras: uma adaptação do jogo “Cubra Doze” para explorar as operações com números negativos.

Conforme citado, a primeira atividade por nós desenvolvida com as duas turmas de 7ª série que acompanhamos foi o jogo “Cubra Doze”. Com a ajuda da professora preparamos o material necessário para a atividade e na aula marcada para a aplicação a professora disse aos alunos que nós é que coordenaríamos a aula naquele dia e ela estaria ali apenas para nos ajudar quando preciso. A partir daí a coordenação da turma ficou sob nossa responsabilidade, e sob a supervisão da professora.

Após uma conversa com a turma sobre a atividade que desenvolveríamos, pedimos que eles sentassem em dupla. Depois de agrupados, distribuímos para cada dupla o material necessário para jogar (o tabuleiro, dois dados e papeizinhos para cobrir) conforme a figura 1.

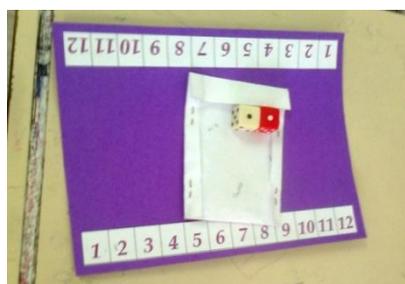


Figura 1 – Tabuleiro do jogo Cubra doze

Com o material em mãos explicamos as regras do jogo (FALCÃO, et al, 2011) e em seguida os alunos começaram a jogar. Os alunos demoraram a entender e usar todas as possibilidades que tinham, os que usaram, geralmente efetuavam a primeira operação que vinha a cabeça e não pensavam sobre como jogar de modo que pudessem ganhar o jogo.

Depois de certo número de rodadas os alunos começaram a perceber que os resultados obtidos em algumas jogadas eram números já cobertos e tinham que passar a vez para seu colega. E perceberam que alguns números eram bem difíceis de aparecer como resultado. Assim que todas as duplas concluíram o jogo, demos início à segunda etapa da atividade. Questionamos sobre quais números eles tiveram mais dificuldade de cobrir, alguns disseram ter sido o número 11, outros o número 7, enfim, a questão que levantamos foi qual seria o modo mais inteligente de se jogar, como pensar em cada jogada de forma a facilitar ganhar o jogo.

Distribuímos a folha que aparece na figura 2 para cada dupla dando as orientações para o seu preenchimento. Solicitamos primeiramente que eles a preenchessem colocando em cada célula em branco das tabelas das operações, o resultado da operação realizada com os números apresentados na mesma linha e na mesma coluna da célula a ser completa. Isso se o resultado fosse um número entre 1 e 12, caso contrário, marcariam um “X” no lugar do resultado. Por exemplo, a célula situada na linha 5 e coluna 6 da tabela da adição deveria ser preenchida com o “11”. Mas a mesma célula na tabela da multiplicação deveria ser preenchida com um “X”, já que o resultado da multiplicação de 5 por 6 não aparecia no tabuleiro do jogo. Depois de preenchidas eles deveriam indicar na outra tabela, que tinha os números de 1 a 12, quantas vezes cada um desses números apareciam, ao todo, nas quatro tabelas das operações.



Figura 2 – Folha com os quadros para análise e comparação

Assim que terminaram de preencher toda a folha, pedimos que eles observassem os resultados obtidos e refizemos a pergunta do início do jogo: Se sorteássemos o “5” e “6”, por exemplo, que números vocês cobririam? Baseados nas informações descobertas por meio das tabelas, os alunos começaram a perceber que os números que eles mais demoraram a cobrir eram os que apareciam menos vezes nas tabelas preenchidas. E daí alguns deles responderam a pergunta, “o 11, pois ele aparece menos vezes”. Alguns alunos demoraram um pouco mais para compreender a relação entre a escolha do número a ser coberto e as chances dele aparecer. Mas os próprios colegas, que já tinham compreendido isso, se encarregaram de explicar. Conheciam agora uma estratégia para o jogo.

Conversamos com eles que todo jogo possui estratégias e que é a busca e o conhecimento delas que diferencia o bom jogador do mau jogador. Depois disso, eles jogaram mais uma partida percebendo que dessa vez o processo foi mais rápido, além de mais divertido e usando uma matemática mais ampla.

Após aplicação do jogo Cubra Doze, como havíamos planejado, a professora iniciou a atividade de revisão das operações de adição e multiplicação de números inteiros distribuindo para cada aluno

cópias das tabelas de adição e multiplicação a seguir, dando as orientações de como fazer para completá-la. Dissemos para eles que as completassem de acordo com o que eles achavam estar correto sobre as operações de adição e multiplicação de números inteiros.

+	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5											
-4											
-3											
-2											
-1				■							
0											
1											
2											
3											
4											
5											

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5											
-4											
-3											
-2											
-1											
0											
1											
2											
3											
4											
5											

Figura 3 – Tabela da adição e multiplicação de números inteiros

Para cada célula em branco, os alunos deveriam realizar a operação indicada com os números apresentados na mesma linha e na mesma coluna da célula. Por exemplo, considerando a célula marcada na tabela da adição (figura 3), os alunos deveriam preenchê-la com o resultado da operação $(-1) + (-2)$, portanto, com -3 .

Depois que os alunos completaram as tabelas, a professora fez a correção dos resultados, em ambas tabelas, iniciando pelos cálculos com os números positivos e com o zero. Destacou que a partir desses resultados seria possível obter aqueles que envolviam números negativos, bastando ficar atento as regularidades que se apresentavam para os números positivos. Por exemplo, considerando a sétima linha da tabela de adição a ser completa,

1						1	2	3	4	5	6
---	--	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---

a professora disse que a próxima célula deveria ser completa com o 0 (zero), para continuar a sequência que vinha sendo construída (da direita para esquerda). O seguinte deveria ser -1 , e assim por diante. O mesmo poderia ser feito levando em consideração as colunas. Ela também utilizou a ideia de números negativos como “dívida” e os positivos como saldo. Assim foi completada a tabela da adição. Podemos observar que a visualização de padrões facilitou a assimilação das ideias que desejávamos que os alunos compreendessem, levando-os a explorar muitas possibilidades, pensando no porque esses padrões ocorriam e como explica-los.

No caso da multiplicação, o mesmo recurso de observação das sequências com os números positivos foi utilizado, enfatizando a ideia de subtração. Por exemplo, considerando a última linha,

5					0	5	10	15	20	25
---	--	--	--	--	---	---	----	----	----	----

o próximo número desta sequência, da direita para a esquerda, deveria ser -5 , seguido do -10 e assim por diante.

Com as tabelas corrigidas a professora lançou as seguintes perguntas para os alunos responderem para cada tabela: 1) Que regularidades você observa na tabela? 2) Em que situações apareceram resultados positivos? 3) Em que situações apareceram resultados negativos?

Para a primeira pergunta os alunos inicialmente ficaram com dúvidas, pois faziam uma atividade desse tipo pela primeira vez. A professora deu-lhes então um exemplo e a partir daí começaram a pensar em novas regularidades. Alguns alunos conseguiram visualizar até seis regularidades para a tabela da adição. Na socialização das regularidades, a professora conseguiu identificar doze regularidades diferentes para a tabela da adição as quais, registrou no quadro e solicitou que os alunos copiassem aquelas que eles não haviam percebido. Notamos que os alunos apresentaram certa dificuldade em descreverem as regularidades, ao que tivemos, junto com a professora, que orientá-los na escrita. Isso é normal numa primeira tentativa de atividade desse tipo.

As duas últimas questões, que eram centrais para o objetivo da atividade, que era recordar as “regras” das operações de adição e multiplicação com números inteiros, foram respondidas de modo satisfatório, apesar de alguns alunos não terem conseguido chegar às respostas. Nessa etapa tivemos, juntos com a professora, que orientar alguns alunos questionando-os sobre o comportamento dos números nas tabelas para conseguirem relacionar os resultados (positivos ou negativos) com os números utilizados para obtê-los. Assim que a maioria dos alunos apresentaram suas respostas, a professora seguiu com a socialização das mesmas destacando que suas respostas eram “regrinhas” de adição e multiplicação de inteiros que eles haviam estudado na série anterior.

Nas aulas que se seguiram a professora continuou com o conteúdo curricular (operações com monômios) que exigia o conhecimento das operações com números inteiros (relembrando que foi a partir dessa necessidade que iniciamos as atividades apresentadas neste artigo).

Com o objetivo de reforçar o trabalho de revisão das operações de adição e multiplicação de números inteiros feitos por meio da atividade com as tabelas, após algumas aulas retomamos o assunto com a aplicação de uma adaptação do jogo “Cubra Doze” para números negativos e o zero. Isso porque observamos que as dificuldades dos alunos permaneciam mesmo com as incansáveis orientações da professora durante o desenvolvimento do conteúdo “operações com monômios” e de nosso trabalho de monitoria durante a resolução de exercícios em sala.

A adaptação funcionou da seguinte forma: cada dupla recebeu um tabuleiro contendo os números inteiros de -12 até 12, dois dados e 50 fichas para “cobrir” os números. Assim, analogamente ao primeiro “Cubra Doze”, os alunos deveriam lançar os dados e com os números sorteados deveriam escolher uma operação aritmética para realizar com estes números. A diferença é que, como precisavam “cobrir” números negativos eles também poderiam escolher se os números sorteados seriam positivos ou negativos do modo que achassem mais adequado. Além disso, eles precisavam registrar o processo utilizado para termos uma noção de como eles estavam pensando.

A princípio, os alunos acharam essa versão do jogo mais difícil, mas no decorrer da aula perceberam não ser tão complicado assim. Alguns até acharam mais interessante, pois já conheciam a estratégia para jogar e com um pouco de “esperteza” conseguiam vencer.

Fazendo uma breve observação das respostas dos alunos a uma das questões da avaliação, dada pela professora, em que se pedia para calcular “ $-4 + 7$ ” apresentavam como resultado “-3”. Com base nessa observação acreditamos que isso se deva ao fato deles associarem, nesta operação, a regra “menos com mais dá menos”.

Por falta de tempo entre aplicação da avaliação e a escrita deste relato, não pudemos fazer uma análise adequada das provas e exercícios dos alunos que se encontram com a professora e, por isso, não apresentamos aqui resultados mais consistentes sobre as possíveis consequências dessas atividades no aprendizado de monômios e polinômios. Mas, pudemos identificar que os alunos continuam com muitas dúvidas e cometendo erros em relação ao conteúdo revisado. Isso se deve talvez à má formação dos conceitos e significados relacionados ao conteúdo quando lhes foi ensinado pela primeira vez ou pela necessidade um período mais amplo para a construção desses conceitos matemáticos. Vale destacar que é mais difícil romper com conceitos aprendidos errados para acertá-los do que construir novos conceitos.

3. Considerações finais

Verificamos nessa nossa primeira etapa do projeto, que não é somente a aplicação de jogos ou atividades diferenciadas, ou o auxílio na sala de aula de duas ou mais pessoas trabalhando junto com o professor de matemática que reduzirá significativamente os problemas de ensino e aprendizagem da matemática. Assim após observar a aplicação da prova e analisando-as brevemente, percebemos que eles estão *tentando* fazer as questões. E isso, para nós é um avanço, considerando – como exposto no início deste relato – que na prova aplicada pela professora antes de iniciarmos nosso trabalho e que tivemos a oportunidade de analisar, alguns alunos entregaram-nas praticamente em branco. Ainda não podemos dizer que alcançamos o resultado almejado, mas sem dúvida estamos caminhando para alcançá-lo.

Por meio dessa atividade identificamos as confusões que os alunos fazem entre os dois campos conceituais, aditivo e multiplicativo, principalmente no que se refere as “regras”, verificamos que mesmo depois de todo esforço conjunto (nosso e da professora), no sentido de rever o conteúdo de operações com números inteiros, muitos alunos ainda não conseguem operar com esses números com facilidade. Alguns inclusive cometem ainda os mesmos erros que percebemos em nosso primeiro dia de observação nas salas.

A história do uso e compreensão dos números inteiros revela que essa dificuldade em trabalhar com esses números não é algo atual, mas histórico, muitos anos de trabalho precisaram ser empregados para que se pudesse compreender o significado e operar com estes números, contudo podemos fazer uso de metodologias para que esse ensino possa ser facilitado. Afinal o que é logicamente claro para nós professores, não é tão simples para os alunos.

Referências

- FALCÃO, Emmanuel de Souza Fernandes, et al. A problematização por meio de jogos: uma possibilidade de aprendizagem para as quatro operações fundamentais. In: **Anais do XIII CIAEM-IACME**, 2011, Recife. Disponível em: <<http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1137.pdf>>. Acesso em 13 de jul. 2012.
- TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Uma abordagem histórica dos números negativos**. Disponível em <http://www.ccuec.unicamp.br/revista/infotec/artigos/leda.html>. Acesso em 11 de ago. 2012.